Aula 33

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Separáveis**

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{3y^2 + e^y}, \qquad y(0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^3 + e^y = t^2 + 1$$

Teorema (Função Implícita): Seja $\Phi(t, y)$ uma função de classe C^1 e $\Phi(t_0, y_0) = 0$. Então, se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0,$$

existe uma vizinhança U de (t_0, y_0) e uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $t_0 \in I$, $f(t_0) = y_0$ tal que

$$(t, y) \in U, \quad \Phi(t, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(t).$$

Teorema: Considere-se o problema de Cauchy para a EDO separável

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}, \qquad y(t_0) = y_0,$$

com g, f funções reais contínuas em vizinhanças, respetivamente, de t_0 e y_0, com $f(y_0) \neq 0$.
Então existe solução única $y :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$, para algum $\varepsilon > 0$, a qual é dada implicitamente por

$$F(y) = F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad \text{com } F(y) = \int f(y)dy.$$

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

é **exata** se existe $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(t, y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad N(t, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, se e só se o campo $(M(t, y), N(t, y))$ é um campo gradiente (ou conservativo). Nesse caso, a solução geral é dada implicitamente por

$$\phi(t, y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Considere-se uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$. Então:

- é condição necessária para ser exata que o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω, ou seja, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

- é condição suficiente para ser exata que o domínio Ω seja simplesmente conexo e o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω.